ANALISIS KESTABILAN MODEL EPIDEMIK SEIR PADA PENYEBARAN PENYAKIT MENGGUNAKAN METODE RUNGE KUTTA ORDE 4

Ratna Dwi Christyanti [(1)], Abdul Arif [(2)] Eka Wahyunita Sari Puluadji [(3)]
[1,2,3s]Jurusan Matematika, Universitas Kaltara, Kabupaten Bulungan
E-mail: ratnadwichrityantii@gmail.com

ABSTRACT

One example of a mathematical model that can be used in the spread of disease is the SEIR *epidemic model. The purpose of this study was to determine the mathematical modeling of the* SEIR *epidemic model, the equilibrium in the* SEIR *epidemic model, and the stability analysis of the* SEIR *epidemic model. In this study, it will be conducted using the Runge Kutta 4th Order method and completed using Maple software. Based on the results of the study, obtained the* SEIR *epidemic model is* $\frac{d\dot{S}}{dt} = (1-p)\mu - \beta\dot{S}\dot{I} - \mu\dot{S}$, $\frac{d\dot{E}}{dt} = \beta\dot{S}\dot{I} - (\delta+\mu)\dot{E}$, $\frac{d\dot{I}}{dt} = \delta\dot{E} - (\alpha+\mu)\dot{I}$, $\frac{d\dot{R}}{dt} = \alpha\dot{I} - \mu\dot{R}$. *The disease equilibrium point is* $E_0^* = (1-p, 0,0,0)$ *and* $E_1^* = \left(\frac{\alpha\delta+\alpha\mu+\delta\mu+\mu^2}{\beta\delta}, -\frac{\mu(\beta\delta p+\alpha\delta+\alpha\mu-\beta\delta+\delta\mu+\mu^2)}{\delta(\delta+\mu)\beta}, -\frac{\mu(\beta\delta p+\alpha\delta+\alpha\mu-\beta\delta+\delta\mu+\mu^2)}{\beta(\alpha\delta+\alpha\mu+\delta\mu+\mu^2)}, -\frac{\alpha(\beta\delta p+\alpha\delta+\alpha\mu-\beta\delta+\delta\mu+\mu^2)}{\beta(\alpha\delta+\alpha\mu+\delta\mu+\mu^2)}\right)$. *And the stability of the disease-free equilibrium point is* $E_0^* = (-\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\delta - \mu + \frac{1}{2}\sqrt{-4\beta\delta p + \alpha^2 - 2\alpha\delta + 4\beta\delta + \delta^2}, -\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\delta - \mu - \frac{1}{2}\sqrt{-4\beta\delta p + \alpha^2 - 2\alpha\delta + 4\beta\delta + \delta^2}, -\mu, -\mu)$ *and stability analysis of epidemic equilibrium points is* $E_1^* = (-0.01,\ 0.003,\ -0.00167,\ -0.00167)$.

Keywords : SEIR *Epidemic Model, Equilibrium Point, Maple*

ABSTRAK

Salah satu contoh model matematika yang dapat digunakan pada penyebaran penyakit adalah model epidemik SEIR. Tujuan dalam penelitian ini adalah untuk mengetahui pemodelan matematika pada model epidemik tipe SEIR, bentuk kesetimbangan dalam model epidemik tipe SEIR, dan analisis kestabilan model epidemik SEIR. Pada penelitian ini, akan dilakukan dengan menggunakan metode Runge Kutta orde 4 dan diselesaikan berbantu *software* Maple. Berdasarkan hasil penelitian, didapat model epidemik SEIR yaitu $\frac{d\dot{S}}{dt} = (1-p)\mu - \beta\dot{S}\dot{I} - \mu\dot{S}$, $\frac{d\dot{E}}{dt} = \beta\dot{S}\dot{I} - (\delta+\mu)\dot{E}$, $\frac{d\dot{I}}{dt} = \delta\dot{E} - (\alpha+\mu)\dot{I}$, $\frac{d\dot{R}}{dt} = \alpha\dot{I} - \mu\dot{R}$. Titik kesetimbangan penyakit yaitu $E_0^* = (1-p, 0,0,0)$ dan $E_1^* = \left(\frac{\alpha\delta+\alpha\mu+\delta\mu+\mu^2}{\beta\delta}, -\frac{\mu(\beta\delta p+\alpha\delta+\alpha\mu-\beta\delta+\delta\mu+\mu^2)}{\delta(\delta+\mu)\beta}, -\frac{\mu(\beta\delta p+\alpha\delta+\alpha\mu-\beta\delta+\delta\mu+\mu^2)}{\beta(\alpha\delta+\alpha\mu+\delta\mu+\mu^2)}, -\frac{\alpha(\beta\delta p+\alpha\delta+\alpha\mu-\beta\delta+\delta\mu+\mu^2)}{\beta(\alpha\delta+\alpha\mu+\delta\mu+\mu^2)}\right)$. Dan diperoleh analisis kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu

$$E_0^* = (-\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\delta - \mu + \frac{1}{2}\sqrt{-4\beta\delta p + \alpha^2 - 2\alpha\delta + 4\beta\delta + \delta^2}, -\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\delta - \mu - \frac{1}{2}\sqrt{-4\beta\delta p + \alpha^2 - 2\alpha\delta + 4\beta\delta + \delta^2}, -\mu, -\mu)$$

dan analisis kestabilan titik kesetimbangan epidemik $E_1^* = (-0.01,\ 0.003,\ -0.00167,\ -0.00167)$.

Kata kunci: Model Epidemik SEIR, Titik Kesetimbangan, Maple

1. Pendahuluan

Penyakit endemik, yaitu penyakit yang menyebar pada suatu wilayah dalam kurun waktu yang sangat lama, bisa menjadi ancaman bagi populasi di suatu wilayah. Suatu populasi yang terdapat penyakit endemik di dalamnya bisa mengalami kepunahan jika tidak dilakukan penanganan yang tepat. Model epidemik adalah model matematika yang digunakan untuk mengetahui penyebaran penyakit menular, khususnya menyangkut terjadi atau tidaknya keadaaan epidemik serta pengaruh yang ditimbulkan. Beberapa penyakit seperti HIV, malaria dan campak (*measles*) memiliki masa inkubasi, yaitu dimana suatu penyakit menular sudah menginfeksi namun tubuh penderita belum menunjukkan adanya gejala infeksi suatu penyakit.

Pada penelitian ini akan digunakan model epidemik SEIR yaitu manusia yang rentan terinfeksi (*susceptibles*), manusia yang memperlihatkan gejala terinfeksi (*exposed*), manusia yang telah terinfeksi (*infected*), dan manusia yang telah sembuh (*recovered*). Tujuan dalam penelitian ini adalah untuk mengetahui pemodelan matematika pada model epidemik tipe SEIR, bentuk kesetimbangan dalam model epidemik tipe SEIR, dan analisis kestabilan model epidemik SEIR. Maanfaat dalam penelitian ini adalah agar dapat memberikan suatu sumbangsih pengetahuan bahwa ilmu pengetahuan memiliki peranan yang sangat luas bagi kehidupan, dapat menambah pengetahuan di bidang matematika khususnya tentang model matematika suatu penyakit dan memberikan masukan kepada penulis lain yang ingin mengembangkan penulisan tentang model SEIR untuk penyebaran penyakit. Pada penelitian ini, akan dilakukan dengan menggunakan metode Runge Kutta orde 4 dan diselesaikan berbantu *software* Maple.

2. Metode

Dalam menganalisis model epidemik SEIR akan dilakukan dengan menentukan batasan, asumsi-asumsi, serta parameter yang akan digunakan sehingga dapat dibuat model kompartemen dengan 4 kelompok individu, yaitu *susceptible* (individu yang rentan terhadap penyakit), *exposed* (individu yang tertular penyakit tetapi belum menunjukkan tanda-tanda mengidap penyakit), *infected* (individu yang terjangkit dan dapat menularkan penyakit), dan *recovered* (individu yang telah sembuh dari penyakit).

Pada model dinamik SEIR akan ditentukan titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Kemudian menganalisis kestabilan titik kesetimbangan dengan mencari nilai eigen berdasarkan matriks Jacobian yang melibatkan titik kesetimbangan.

Setelah itu, menyusun simulasi numerik Runge-Kutta Orde 4 dari model dinamik SEIR. Simulasi ini menggunakan *software* pemrograman yaitu Maple yang menggambarkan grafik kestabilan dan penyelesaian numerik model dinamik SEIR. Setelah dilakukan analisa dan pembahasan maka akan diambil suatu kesimpulan sehingga mendapatkan suatu hasil.

3. Hasil dan Pembahasan

Pemodelan Matematika Epidemik SEIR

Beberapa asumsi yang akan digunakan dalam pembentukan model epidemik SEIR sebagai berikut :

1. Jumlah populasi diasumsikan cukup besar;
2. Laju kelahiran dan laju kematian diasumsikan sama sehingga total populasi diasumsikan konstan;
3. Semua bayi yang lahir diasumsikan rentan terhadap suatu penyakit;
4. Populasi diasumsikan tertutup yang artinya tidak adanya imigrasi dan emigrasi;
5. Populasi diasumsikan bercampur yang artinya setiap individu mempunyai kemungkinan untuk melakukan kontak atau interaksi dengan individu lainnya;
6. Penyakit mempunyai priode laten atau masa inkubasi;
7. Vaksin hanya diberikan pada individu yang baru lahir;
8. Keampuhan vaksinasi adalah 100%;
9. Kekebalan karena vaksinasi bersifat permanen yang berarti individu tidak akan terinfeksi yang sama dalam waktu yang tidak terbatas;

10. Individu yang telah sembuh diasumsikan memiliki kekebalan tubuh permanen terhadap infeksi.

Dari asumsi-asumsi tersebut diperoleh model epidemik SEIR sebagai berikut:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= (1-p)\mu N - \beta\frac{SI}{N} - \mu S,\\ \frac{dE}{dt} &= \beta S\frac{I}{N} - (\delta+\mu)E,\\ \frac{dI}{dt} &= \delta E - (\alpha+\mu)I,\\ \frac{dR}{dt} &= \alpha I - \mu R,\\ N &= S+E+I+R.\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Dimana,
1. $S(t)$ adalah jumlah individu rentan pada saat t,
2. $E(t)$ adalah jumlah individu dikelas laten pada saat t,
3. $I(t)$ adalah jumlah individu terinfeksi pada saat t,
4. $R(t)$ adalah jumlah individu sembuh pada saat t,
5. N adalah total populasi.

Parameter-parameter yang digunakan sebagai berikut :
1. μ adalah laju kelahiran dan laju kematian tiap individu pada populasi,
2. β adalah tingkat penyebaran atau peluang individu rentan menjadi individu laten setelah berinteraksi dengan individu yang terinfeksi,
3. δ adalah laju transfer dari kelas laten menjadi terinfeksi,
4. α adalah laju kesembuhan tiap individu,
5. p adalah proporsi vaksinasi.

dengan $\mu, \beta, \delta, \alpha > 0$ dan p bernilai $0 \le p \le 1$.

Dari sistem persamaan (1) asumsikan $\frac{dN}{dt} = 0$, sehingga berakibat $N(t) = k, k \in \Re$.

Proporsi banyaknya individu masing-masing kelas dinyatakan sebagai berikut :

$$\dot{S} = \frac{S}{N}, \quad (2)$$

$$\dot{E} = \frac{E}{N}, \quad (3)$$

$$\dot{I} = \frac{I}{N}, \quad (4)$$

$$\dot{R} = \frac{R}{N}. \quad (5)$$

Diperoleh, $\dot{S} + \dot{E} + \dot{I} + \dot{R} = \frac{S}{N} + \frac{E}{N} + \frac{I}{N} + \frac{R}{N} = \frac{N}{N} = 1.$

Dari persamaan (2), persamaan (3), persamaan (4) dan persamaan (5) akan disubstitusikan ke dalam sistem persamaan (1) sehingga diperoleh sebuah sistem persamaan baru sebagai berikut.

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\dot{S}}{dt} &= (1-p)\mu - \beta\dot{S}\dot{I} - \mu\dot{S},\\ \frac{d\dot{E}}{dt} &= \beta\dot{S}\dot{I} - (\delta+\mu)\dot{E},\\ \frac{d\dot{I}}{dt} &= \delta\dot{E} - (\alpha+\mu)\dot{I},\\ \frac{d\dot{R}}{dt} &= \alpha\dot{I} - \mu\dot{R}.\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Titik Kesetimbangan Penyebaran Penyakit

Didapatkan dua titik kesetimbangan sebagai berikut:

a. Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Titik kesetimbangan bebas penyakit dapat dinyatakan dalam bentuk $E_1^* = \left(\dot{S}_0, \dot{E}_0, \dot{I}_0, \dot{R}_0\right)$ terjadi jika $\dot{E} = 0$ dan $\dot{I} = 0$.

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\dot{S}}{dt} &= (1-p)\mu - \beta\dot{S}\dot{I} - \mu\dot{S}, \\ \frac{d\dot{R}}{dt} &= \alpha\dot{I} - \mu\dot{R}. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Karena $\dot{E} = 0$, dan $\dot{I} = 0$, maka dari sistem persamaan (7) akan didapatkan nilai $\dot{R} = 0$. Hal ini menyebabkan nilai $\dot{S} = 1 - p$.

Jadi, titik kesetimbangan bebas penyakit adalah

$$E_0^* = \left(\dot{S}_0, \dot{E}_0, \dot{I}_0, \dot{R}_0\right) = (1-p, 0, 0, 0).$$

b. Titik Kesetimbangan Epidemik

Dengan bantuan *software* Maple didapatkan titik kesetimbangan epidemik penyakit sebagai berikut:

$$\left.\begin{aligned} \dot{S}_1 &= \frac{\alpha\delta + \alpha\mu + \delta\mu + \mu^2}{\beta\delta}, \\ \dot{E}_1 &= -\frac{\mu\left(\beta\delta p + \alpha\delta + \alpha\mu - \beta\delta + \delta\mu + \mu^2\right)}{\delta(\delta+\mu)\beta}, \\ \dot{I}_1 &= -\frac{\mu\left(\beta\delta p + \alpha\delta + \alpha\mu - \beta\delta + \delta\mu + \mu^2\right)}{\beta\left(\alpha\delta + \alpha\mu + \delta\mu + \mu^2\right)}, \\ \dot{R}_1 &= -\frac{\alpha\left(\beta\delta p + \alpha\delta + \alpha\mu - \beta\delta + \delta\mu + \mu^2\right)}{\beta\left(\alpha\delta + \alpha\mu + \delta\mu + \mu^2\right)}. \end{aligned}\right\}$$

Analisis Kestabilan Pada Titik Kesetimbangan

Pada pembahasan ini akan dilakukan analisis kestabilan pada titik keseimbangan dengan melakukan lineariasi suatu sistem model penyebaran penyakit dari sistem persamaan (6). Selanjutnya hasil sistem persamaan linier yang telah didapatkan disubsitusikan ke dalam matriks jacobian A, sehingga diperoleh matriks sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} -\beta\dot{I} - \mu & 0 & -\beta\dot{S} & 0 \\ \beta\dot{I} & -\delta-\mu & \beta\dot{S} & 0 \\ 0 & \delta & -\alpha-\mu & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\mu \end{bmatrix}$$

a. Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Pada pembahasan ini untuk melakukan analisis kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit maka titik kesetimbangan bebas penyakit $E_0^* = \left(\dot{S}_0, \dot{E}_0, \dot{I}_0, \dot{R}_0\right)$ dimana $\left(\dot{S}_0 = 1-p, \dot{E}_0 = 0, \dot{I}_0 = 0, \dot{R}_0 = 0\right)$ disubtitusikan pada matriks jacobian yang telah diperoleh sebagai berikut:

$$A = J\left(E_0^*\right) = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & -\beta(1-P) & 0 \\ 0 & -\delta-\mu & \beta(1-P) & 0 \\ 0 & \delta & -\alpha-\mu & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\mu \end{bmatrix}$$

Untuk mencari nilai eigen dari matriks tersebut dibentuk persamaan karakteristik dari determinan sehingga diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$\left((\lambda+\mu)\left((\lambda+\delta+\mu)(\lambda+\alpha+\mu)(\lambda+\mu)\right) + \delta\left(\beta(1-p)(\lambda+\mu)\right)\right) = 0$$

Dengan bantuan *software* maple, sehingga diperoleh nilai eigennya sebagai berikut:

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1 &= -\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\delta-\mu+\frac{1}{2}\sqrt{-4\beta\delta p+\alpha^2-2\alpha\delta+4\beta\delta+\delta^2},\\ \lambda_2 &= -\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\delta-\mu-\frac{1}{2}\sqrt{-4\beta\delta p+\alpha^2-2\alpha\delta+4\beta\delta+\delta^2},\\ \lambda_3 &= -\mu,\\ \lambda_4 &= -\mu.\end{aligned}\right\}$$

Dari hasil nilai eigen yang didapatkan, ditunjukkan bahwa $\lambda_3,\lambda_4<0$, dikarenakan nilai dari $\mu>0$. Jika λ_1 memiliki nilai real negatif, maka nilai eigen dari $\lambda_1<0$, dan jika λ_2 memiliki nilai real negatif maka nilai eigen dari $\lambda_2<0$ sehingga titik kesetimbangan bebas penyakit menghasilkan sifat stabil asimtotik yang ditunjukkan tabel 1 sebagai berikut.

Tabel 1. Sifat Kestabilan Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Titik Kesetimbangan $\left(E_0^*\right)$	Nilai Eigen	Sifat Kestabilan
$\dot{S}_0=1-p$, $\dot{E}_0=0$, $\dot{I}_0=0$, $\dot{R}_0=0$	$\lambda_1=-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\delta-\mu+\frac{1}{2}\sqrt{-4\beta\delta p+\alpha^2-2\alpha\delta+4\beta\delta+\delta^2}$, $\lambda_2=-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\delta-\mu-\frac{1}{2}\sqrt{-4\beta\delta p+\alpha^2-2\alpha\delta+4\beta\delta+\delta^2}$, $\lambda_3=-\mu$, $\lambda_4=-\mu$.	Stabil Asimtotik

b. Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan Epidemik

Kestabilan titik kesetimbangan epidemik penyakit $E_0^*=\left(\dot{S}_0,\dot{E}_0,\dot{I}_0,\dot{R}_0\right)$ disubtitusikan pada matriks jacobian yang telah diperoleh sebagai berikut:

$$B = J\left(E_1^*\right)$$
$$\begin{bmatrix} \frac{\beta\mu\left(\mu^2+\alpha\delta+\alpha\mu-\beta\delta+\beta\delta p+\delta\mu\right)}{\beta\left(\mu^2+\alpha\delta+\alpha\mu+\delta\mu\right)}-\mu & 0 & -\frac{\beta\left(\mu^2+\alpha\delta+\alpha\mu+\delta\mu\right)}{\beta\delta} & 0 \\ -\frac{\beta\mu\left(\mu^2+\alpha\delta+\alpha\mu-\beta\delta+\beta\delta p+\delta\mu\right)}{\beta\left(\mu^2+\alpha\delta+\alpha\mu+\delta\mu\right)} & -\delta-\mu & -\frac{\beta\left(\mu^2+\alpha\delta+\alpha\mu+\delta\mu\right)}{\beta\delta} & 0 \\ 0 & \delta & -\alpha-\mu & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\mu \end{bmatrix}$$

Untuk mencari nilai eigen matriks jacobian B yang berukuran 4×4, maka matriks jacobian B ditulis sebagai berikut:

$$|\lambda I-B| = 0$$

maka

$$\begin{bmatrix} \lambda-\left(\frac{\beta\mu\left(\mu^2+\alpha\delta+\alpha\mu-\beta\delta+\beta\delta p+\delta\mu\right)}{\beta\left(\mu^2+\alpha\delta+\alpha\mu+\delta\mu\right)}-\mu\right) & 0 & -\frac{\beta\left(\mu^2+\alpha\delta+\alpha\mu+\delta\mu\right)}{\beta\delta} & 0 \\ -\frac{\beta\mu\left(\mu^2+\alpha\delta+\alpha\mu-\beta\delta+\beta\delta p+\delta\mu\right)}{\beta\left(\mu^2+\alpha\delta+\alpha\mu+\delta\mu\right)} & \lambda+\delta+\mu & -\frac{\beta\left(\mu^2+\alpha\delta+\alpha\mu+\delta\mu\right)}{\beta\delta} & 0 \\ 0 & \delta & \lambda+\alpha+\mu & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \lambda+\mu \end{bmatrix} = 0$$

Persamaan karakteristiknya adalah sebagai berikut:

$$\left(\lambda-\left(\frac{\beta\mu\left(\mu^2+\alpha\delta+\alpha\mu-\beta\delta+\beta\delta p+\delta\mu\right)}{\beta\left(\mu^2+\alpha\delta+\alpha\mu+\delta\mu\right)}-\mu\right)\right)\begin{bmatrix} \lambda+\delta+\mu & -\frac{\beta\left(\mu^2+\alpha\delta+\alpha\mu+\delta\mu\right)}{\beta\delta} & 0 \\ \delta & \lambda+\alpha+\mu & 0 \\ 0 & \alpha & \lambda+\mu \end{bmatrix}$$

$$= 0$$

$$+\left(-\frac{\beta\left(\mu^2+\alpha\delta+\alpha\mu+\delta\mu\right)}{\beta\delta}\right)\begin{bmatrix} -\frac{\beta\mu\left(\mu^2+\alpha\delta+\alpha\mu-\beta\delta+\beta\delta p+\delta\mu\right)}{\beta\left(\mu^2+\alpha\delta+\alpha\mu+\delta\mu\right)} & \lambda+\delta+\mu & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+\mu \end{bmatrix}$$

Untuk kesetimbangan epidemik penyakit akan dibuat dengan grafik pada simulasi numerik sebagai berikut:

a. Simulasi numerik dilakukan dengan menggunakan metode *Rungge Kutta* orde empat dan *software Maple 18*.
b. Pada bagian ini simulasi akan di lakukan pada titik kesetimbangan endemik; pada keadaan epidemik, syarat awal untuk populasi yang rentan $S(0)=50$, populasi yang dicurigai terinfeksi $E(0)=45$, populasi yang terinfeksi $I(0)=30$, dan populasi yang telah sembuh $R(0)=15$. Dan parameter-parameter yang digunakan yaitu pada tabel berikut.

Tabel 2. Nilai Parameter-Parameter Dalam Model Epidemik

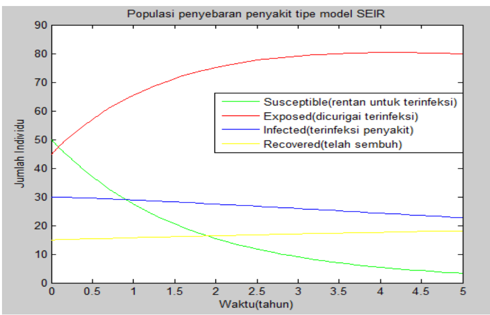
Parameter	Nilai	Penafsiran
μ	0,01	Laju kelahiran dan laju kematian (1 diantara 100 orang akan ada kelahiran dan kematian)
β	0,02	Tingkat penyebaran (2 diantara 100 orang akan terjangkit pada suatu waktu)
δ	0.02	Laju transfer dari kelas laten (2 diantara 100 orang akan positif terinfeksi pada suatu waktu)
α	0,03	Tingkat kesembuhan (3 diantara 100 orang akan sembuh pada suatu waktu)
p	0,9	Proporsi vaksinasi

c. Analisis kestabilan pada titik kesetimbangan epidemik ditunjukkan pada tabel 3 sebagai berikut :

Tabel 3. Sifat Kestabilan Titik Kesetimbangan Epidemik

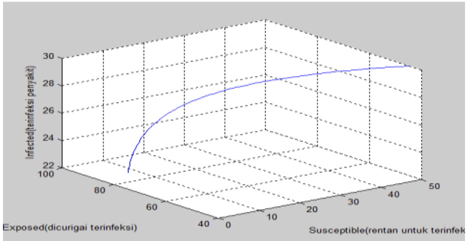
Titik Kesetimbangan $\left(E_1^*\right)$	Nilai Eigen	Sifat Kestabilan
$S_1=\frac{\alpha\delta+\alpha\mu+\delta\mu+\mu^2}{\beta\delta}$,	$\lambda_1 = -0{,}01$	
$E_1=-\frac{\mu\left(\beta\delta p+\alpha\delta+\alpha\mu-\beta\delta+\delta\mu+\mu^2\right)}{\delta(\delta+\mu)\beta}$,	$\lambda_2 = 0.003$	
$I_1=-\frac{\mu\left(\beta\delta p+\alpha\delta+\alpha\mu-\beta\delta+\delta\mu+\mu^2\right)}{\beta\left(\alpha\delta+\alpha\mu+\delta\mu+\mu^2\right)}$,	$\lambda_3 = -0.00167$	Titik Pelana
$R=-\frac{\alpha\left(\beta\delta p+\alpha\delta+\alpha\mu-\beta\delta+\delta\mu+\mu^2\right)}{\beta\left(\alpha\delta+\alpha\mu+\delta\mu+\mu^2\right)}$	$\lambda_4 = -0.00167$	

Berdasarkan nilai awal dan nilai-nilai parameter pada Tabel 3 maka diperoleh laju pertumbuhan epidemik seperti gambar berikut.



Gambar 1. Laju Pertumbuhan Model Epidemik SEIR Pada Saat $0 \leq t \leq 5$

Pada Gambar 1 ditunjukkan bahwa pada saat populasi $S(t)$ semakin berkurang atau menurun maka populasi $E(t)$ semakin meningkat. Begitu juga dengan populasi $I(t)$ semakin menurun maka populasi $R(t)$ terlihat terus mengalami kenaikan.



Gambar 2. Grafik 3 Dimensi Untuk *Susceptible, Exposed* dan *Infected*

Pada titik kesetimbangan epidemik berdasarkan Gambar 2, ditunjukkan bahwa garis tidak menuju ke titik kesetimbangan epidemik pada $E_1^* = (\dot{S}_1, \dot{E}_1, \dot{I}_1, \dot{R}_1) = (50, 45, 30, 15)$ sehingga titik kesetimbangan epidemik memiliki perilaku titik pelana.

4. Simpulan dan Saran

Simpulan

Dari hasil pembahasan diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Model penyebaran penyakit dengan menggunakan tipe SEIR diperoleh sebagai berikut:

$$\frac{d\dot{S}}{dt} = (1-p)\mu - \beta\dot{S}\dot{I} - \mu\dot{S},$$
$$\frac{d\dot{E}}{dt} = \beta\dot{S}\dot{I} - (\delta+\mu)\dot{E},$$
$$\frac{d\dot{I}}{dt} = \delta\dot{E} - (\alpha+\mu)\dot{I},$$
$$\frac{d\dot{R}}{dt} = \alpha\dot{I} - \mu\dot{R}.$$

2. Pada analisis titik kesetimbangan model matematika pada penyebaran penyakit dengan menggunakan tipe SEIR diperoleh dua titik kesetimbangan yaitu
   a. Titik kesetimbangan bebas penyakit E_0^* dan titik kesetimbangan epidemik E_1^* sebagai berikut:

$$E_0^* = (\dot{S}_0, \dot{E}_0, \dot{I}_0, \dot{R}_0) = (1-p, 0, 0, 0)$$

   b. Titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil asimtotik.

$$E_1^* = (\dot{S}_1, \dot{E}_1, \dot{I}_1, \dot{R}_1)$$

Dimana :

$$\dot{S}_1 = \frac{\alpha\delta + \alpha\mu + \delta\mu + \mu^2}{\beta\delta},$$
$$\dot{E}_1 = -\frac{\mu(\beta\delta p + \alpha\delta + \alpha\mu - \beta\delta + \delta\mu + \mu^2)}{\delta(\delta+\mu)\beta},$$

$$\dot{I}_1 = -\frac{\mu\left(\beta\delta p + \alpha\delta + \alpha\mu - \beta\delta + \delta\mu + \mu^2\right)}{\beta\left(\alpha\delta + \alpha\mu + \delta\mu + \mu^2\right)},$$

$$\dot{R}_1 = -\frac{\alpha\left(\beta\delta p + \alpha\delta + \alpha\mu - \beta\delta + \delta\mu + \mu^2\right)}{\beta\left(\alpha\delta + \alpha\mu + \delta\mu + \mu^2\right)}.$$

3. Analisis kestabilan model epidemik SEIR pada penyebaran penyakit adalah sebagai berikut:
   a. Analisis kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit

Titik Kesetimbangan $\left(E_0^*\right)$	Nilai Eigen	Sifat Kestabilan
$\dot{S}_0 = 1 - p$, $\dot{E}_0 = 0$, $\dot{I}_0 = 0$, $\dot{R}_0 = 0$	$\lambda_1 = -\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\delta - \mu + \frac{1}{2}\sqrt{-4\beta\delta p + \alpha^2 - 2\alpha\delta + 4\beta\delta + \delta^2}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\delta - \mu - \frac{1}{2}\sqrt{-4\beta\delta p + \alpha^2 - 2\alpha\delta + 4\beta\delta + \delta^2}$, $\lambda_3 = -\mu$, $\lambda_4 = -\mu$.	Stabil Asimtotik

   b. Analisis kestabilan titik kesetimbangan endemik

Titik Kesetimbangan $\left(E_1^*\right)$	Nilai Eigen	Sifat Kestabilan
$\dot{S}_1 = \frac{\alpha\delta + \alpha\mu + \delta\mu + \mu^2}{\beta\delta}$,	$\lambda_1 = -0{,}01$	Titik Pelana
$\dot{E}_1 = -\frac{\mu\left(\beta\delta p + \alpha\delta + \alpha\mu - \beta\delta + \delta\mu + \mu^2\right)}{\delta\left(\delta + \mu\right)\beta}$,	$\lambda_2 = 0.003$	
$\dot{I}_1 = -\frac{\mu\left(\beta\delta p + \alpha\delta + \alpha\mu - \beta\delta + \delta\mu + \mu^2\right)}{\beta\left(\alpha\delta + \alpha\mu + \delta\mu + \mu^2\right)}$,	$\lambda_3 = -0.00167$	
$\dot{R} = -\frac{\alpha\left(\beta\delta p + \alpha\delta + \alpha\mu - \beta\delta + \delta\mu + \mu^2\right)}{\beta\left(\alpha\delta + \alpha\mu + \delta\mu + \mu^2\right)}$	$\lambda_4 = -0.00167$	

Saran

Diharapkan pada penelitian selanjutnya dapat dikembangankan lagi dengan bentuk model lainnya seperti MSEIR (*Maternal Antibodies, Susceptible, Exposed, Infected, and Recovered*).

Daftar Pustaka

Arif, M. Ziaul & dkk. 2016. *Panduan Maple Untuk Guru SMA Dalam Pembelajaran Matematika Interaktif*. Fakultas MIPA Universitas Jember.

Garvan, Frank. 2002. *The Maple Book*. New York Washington D.C: A CRC.

Hanifah, Ika Nurul. 2013. *Analisis Model Getaran Pegas Teredam Dengan Metode Adams-Basforth-Moulton Dan Runge-Kutta*. Fakultas MIPA Universitas Jember.

Hanisar. 2016. *Pemodelan Matematika Tipe SEIR Pada Populasi Perokok*. Skripsi. Fakultas MIPA Universitas Halu Oleo Kendari.

Hidayati, Khoiril. 2013. *Kestabilan Dan Bifurkasi Model Epidemik SEIR Dengan Laju Kesembuhan Tipe Jenuh*. Tugas Akhir Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh (ITS).

Juhari. 2014. *Program Komputer II Maple*. Modul Praktikum. Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Junaidi. 2016. *Penggunaan Software Maple Dalam Pembelajaran Matematika Pada Materi Integral*. Tugas Akhir Jurusan Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jabal Ghafur Sigli.

Rusdi, Wahyudi & dkk. *Kastabilan Model Epidemik SEIR Dengan Waktu Tunda*. Tugas Akhir Jurusan Matematika Universitas Hasanuddin.

Side, Syafruddin & dkk. 2015. *Pemodelan Matematika Dan Solusi Numerik Untuk Penularan Demam Berdarah.* Penerbit Perdana Mulya Sarana Medan.

Siswanto. 2013. *Model Matematika Penyebaran Flu Burung Dari Unggas Ke Manusia*. Skripsi. Fakultas MIPA Universitas Negeri Semarang.

Widowati & Sutimin. 2007. *Peningkatan Efektivitas Dan Kualitas Pembelajaran Pemodelan Matematika Dengan Model Jigsaw Berbasis Open-Ended Problem.* Buku Ajar. Fakultas MIPA Universitas Diponegoro Semarang.